

构建三角函数刻画周期现象

——任意角三角函数概念的教学反思

王芝平

(北京宏志中学 100013)

1 问题研究背景

笔者近期又系统研读了课程标准和与之配套的人教A版教材,同时也研究了一些相关文献.从文献中得知,受传统习惯的影响,课改初期一些教师对任意角三角函数的“终边定义法”情有独钟,而对人教A版的“单位圆定义法”采取排斥的做法,并提出种种拒绝的理由.^[1]

“单位圆定义法”体现了“三角函数是匀速旋转这个最简单的圆周运动的本质表现”,^[2]既易学、好懂,又为后续学习带来极大方便.而时至今日,一些教师即便认可“单位圆定义法”,但仍对“终边定义法”难以割舍,表现在概念教学时从锐角三角函数出发,通过“特殊与一般的关系”获得任意角三角函数的概念,或“两法并用”^{[3]~[6]},或在任意角三角函数概念形成之前,通过构造直角三角形,借助“锐角三角函数”和解直角三角形,甚至通过测量,求得任意角的终边与单位圆的交点坐标^[7],希望借此来增强任意角三角函数概念形成的“合理性”.其实如此“良苦用心”未必能换来学生对任意角三角函数概念的本质领悟,而对细枝末节的过于纠缠反倒会冲淡对核心内容的理解,也易给学生造成定义任意角三角函数离不开锐角三角函数的错觉.

事实上,初中的锐角三角函数的定义是以直角三角形为载体,关注的是“解决直角三角形的边角关系问题”,而对它的函数本质的认识并不作为重点,锐角三角函数没有真正纳入到函数概念的系统中.所以,锐角三角函数并不是学习任意角三角函数的“最近发展区”,从而以“锐角三角函数”为起点的教学就极有可能导致“学生无法把任意角的三角函数的概念纳入到函数的概念中”^[8].

章建跃老师早在2007年初就建议“用‘单位圆定义法’单刀直入给出定义,然后再在适当时机联系锐角三角函数.”^[1]受此启发,在函数概念的引领下,

以构建圆周运动的函数模型为目的,笔者再一次实施了“任意角的三角函数”的概念教学,取得了较好的教学效果,获得了听课教师们的一致肯定.“一切数学教学法根本上都出于某一数学哲学”(Thom语),虽然自己认为这样的设计优势明显,课上得也比较顺利,但若从不同的视角分析,定有许多不当之处,故希望讨论、争鸣,甚至批评.

2 课堂教学简述(课堂实录详见文[9])

2.1 创设情境 提出问题

在“函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型之一”的先行组织下,向学生提出问题:客观世界中存在着大量循环往复、周而复始的现象,如,圆周运动就是一种具有这种周期现象的重要运动,其特点是一个质点 P 绕圆心 O 作匀速圆周运动,那么它的运动规律该用什么函数模型描述呢?

2.2 构建模型 析出函数

本环节主要围绕“如何建立匀速圆周(单位圆)运动的数学模型”这一三角函数的本质展开,在现代图形技术辅助下,通过恰时恰点的问题串,引导学生经历“任意角 $\alpha \rightarrow \alpha$ 的终边 $OP \rightarrow$ 单位圆上点 P 的横、纵坐标 x, y ”的过程,使学生获得如下对应关系,

$$\text{任意角 } \alpha \rightarrow \text{唯一实数 } x; \quad \textcircled{1}$$

$$\text{任意角 } \alpha \rightarrow \text{唯一实数 } y. \quad \textcircled{2}$$

2.3 生成概念 恰当命名

学生确认 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 就是刻画圆周运动的函数模型,教师鼓励他们给这类重要函数一个正式的名称和简单的记号.学生经过讨论,认为继续沿用余弦、正弦是比较合适的.教师顺势指出它们是刻画周期现象的“最有表现力的函数”.

3 教学反思与感悟

本课是在充分吸纳数学教育专家的最新研究成果基础上的一次大胆尝试,与以往相比,我在教学设计和实施中注意了如下一些问题.

3.1 引言大气 立意高远

任意角三角函数作为一类特殊的函数,与学生认知基础中的其它基本初等函数一样都是描述客观世界变化规律的数学模型,是一般函数的下位概念,所以本课在“函数是描述客观世界变化规律的数学模型”的思想指导下,以构建匀速圆周运动的数学模型为目标,用函数的概念去同化任意角三角函数的概念.这样的教学设计有利于学生将三角函数从它诞生的那一刻起就纳入到函数的大家庭中去,并与函数的有关概念建立密切联系,最终使学生将任意角三角函数与之前学习的其它基本初等函数组成一个有机的知识体系.

课堂教学实践表明,学生在一次函数刻画了匀速直线运动、二次函数刻画了抛物运动、指数函数描述“指数爆炸”、对数函数描述“对数增长”的经验基础上,自然思考:匀速圆周运动该用什么函数来刻画呢?从而体会到三角函数在描述周期现象中的重要作用,进一步自然地感悟到“上帝描述宇宙的文字是数学”(伽利略语)这一经典名言的丰富内涵.如此引入,用时不多,却提高了教学的思想性,突出了“数学育人”之目的.

3.2 突出本质 精简实用

正如前文所述,初中的锐角三角函数关注的是直角三角形的边、角关系问题,随着时代的发展,这类问题已不再是“三角学”的主流问题,取而代之的是与研究各种振动和波动(现代高科技的基础之一)等周期现象——其典型代表就是圆周运动——密切相关的任意角三角函数.项武义先生对此曾经指出“正弦、余弦函数是一起源于圆周运动,密切配合的周期函数,它们是解析几何学和周期函数的分析学中最为基本和重要的函数”,所以,“单位圆定义法”反映了任意角三角函数的本质,较“终边定义法”获得任意角三角函数概念的漫长过程:“回顾定义——坐标化(全新的学习)——单位化(取 $r=1$,全新的学习)”来得直接、深刻,精简实用.如此定义既容易使学生认清三角函数的对应关系、定义域和值域等函数本质,又蕴含了正弦、余弦函数的基本性质几乎皆源于圆的几何性质(主要是其对称性),这是学习三角函数后续各种性质得天独厚的优势条件,是使三角函数的学习变得轻松、愉快的坚实基础,过去之所以把三角函数搞得那么复杂就是由于没有认

识到圆周运动这个本质.整体把握、准确理解教学内容永远是提高课堂教学有效性的必要条件.

3.3 注重过程 强调感悟

虽然函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 也是基本初等函数,但是它们不像学生早已熟悉的二次函数或指数函数那样,只要给出 x 的一个具体的值就能计算出对应的函数值 y .这是因为函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是任意角与单位圆上点的坐标分量的单值对应,这种几何定义方式是学生学习的一个认知障碍.所以在给出概念之前必须让学生充分经历构建函数模型的全部过程,体会其中蕴含的运动与变化,增强“函数信念”(辛钦).为此,教学中调动象限角、弧度制、单位圆,并充分发挥现代图形技术的作用,学生通过操作、观察,直观感知“任意给定一个角 α ,圆周上就有唯一的一个点 $P(x, y)$ 与之对应”,再从“形”中抽象出“数”的对应关系:任意角 $\alpha \rightarrow$ 唯一实数 x ;任意角 $\alpha \rightarrow$ 唯一实数 y .至此,“任意角的三角函数”的概念呼之欲出,在学生们意识到要给这两个重要的函数取个合适的名字和记号的时候,教师对他们表现出了充分的信任,满足了他们心灵深处的需要:“自己是一个发现者、研究者、探索者”.他们通过自由讨论与联想,得到了继续沿用“正弦、余弦”名称和记号的结论.将“锐角三角函数”自然融化到“任意角三角函数”的体系中,表现出数学发展过程中的和谐之美.由于学生始终把注意力集中在三角函数的“函数特性”上,也就自然顺畅、水到渠成地领悟了任意角的三角函数的概念和蕴含其中的数学思想方法,真正把握了三角函数的“本来面目”.

“没有过程—没有思想”,只有经历概念的抽象过程,方能参悟到蕴含其中的思想方法.所以概念教学必须突出概念的形成过程,给学生充分的时间进行“感悟”,切忌在匆忙中“赶悟”.否则,就达不到对概念的准确理解,当然也更谈不上“领会数学的美学价值,提高自身文化素养和创新意识”了.

结束语

数学教学的变革必须适应数学科学的现代发展.我们相信,随着新课改的理性推进和教师专业水平的不断提高,诸如像“单位圆定义法”等反映最新研究成果的教学内容和先进的教育理念会逐渐被更多的一线教师接受与采用.

(下转第12页)

点和线,为这只蝴蝶提供更多展示的机会且有利于它在不同的曲线间迂飞创造更多的“美丽”,本题将圆内的性质推广到椭圆中,当然,双曲线和抛物线也能为它提供“落脚”的条件.

对名题本身进行改造时,首先要以试题的考查目的为基本原则;其次要保证改造推广后试题的科学性,避免出现知识性错误;最后要仔细研究试题的语言表达,应做到简洁、精炼,保证学生没有理解题意的障碍.编制时可适当增加试题的趣味性,体现整体最优思想的价值,这样能够命制出兼具趣味性与科学严谨性的好试题.以名题为背景不能变成中学一个沉重的话题,切忌用昨天的名题,命今天的试题,复昨天的叹息.

“九尺高台,起于垒土”,创新并不能信手拈来,要有坚实的基础.以数学名题背景的试题不断出现,对教师和学生提出了新的挑战.但有一点需要强调:尽管试题的设计来源于世界数学名题,但求解方法还是回归到中学所学的知识,而且以名题命制的试题受到一定的限制不可能占很大的比例,因此没必要将高等知识引进中学.但教师自身要了解试题的来龙去脉,要懂得数学名题的经典处理方法.

一份好的数学试卷如同一台成功的舞台剧,对演员、音乐、舞台设计、灯光等的要求是很苛刻的.每一部分都要服务于整个剧情的需要,灯光师不能只为了灯光的炫目,演员不能为了突出自己的角色夸大自己的演出.因此,以名题为背景的数学试题虽有其独特的文化价值,却不可过分追求.数学试卷应该是多元的、创新的,这样才能体现数学的学科特性.数学不是历史的,它不曾停滞,新的定理、发现和证明不断被提出,正如苏格兰数学家福尔西斯(Andrew Forsyth 1858—1942)所说:

“数学是最古老的科学之一,但又是具有积极意义的科学之一,因为数学这门科学永远充满着青春活力”.所以,数学试题应力求创新,如果一味以名题为背景,就会索然无味,更没有技术可言.

华罗庚曾说:“命题比解题更难”.数学试题的编制兼具理论性和技术性,以名题为背景试题的命制又站在了更高、更新的高度.数学试题是数学严谨美、简洁美、对称美、和谐美和创新美的小小代言人.数学试题应立足于基础,着眼于发展,要体现新课程改革所倡导的“问题解决”的理念和研究成果.当然,要编制数学价值与选拔功能兼备的试题,命题者本身要有严谨的态度、开阔的视野和锲而不舍探索数学的精神.细节如金,其中蕴藏着宝贵的命题资源,若能不懈挖掘,定能收获更加闪耀的试题.

参考文献

- 1 靳平. 数学的100个基本问题[M]. 太原:山西科学技术出版社,2004
- 2 孔凡哲,史亮. 高中数学教育评价[M]. 长春:东北师范大学出版社,2005
- 3 张奠宙,宋乃庆. 数学教育概论[M]. 北京:高等教育出版社,2009
- 4 贾非. 考试与教学[M]. 吉林:吉林教育出版社,1994
- 5 冯跃峰. 奥林匹克数学教育的理论和实践[M]. 上海:上海教育出版社,2005
- 6 戴家干. 改造我们的考试[M]. 北京:高等教育出版社,2008
- 7 杨恩彬,柯跃海,陈清华. 基于选拔的高考试题编制研究(一)——创新题编制研究(1)[J]. 福建中学数学,2004,3:1—4
- 8 杨恩彬,柯跃海,陈清华. 基于选拔的高考试题编制研究(二)——创新题编制研究(2)[J]. 福建中学数学,2004,4:1—3
- 9 雷新勇. 大规模教育考试:命题与评价[M]. 上海:华东师范大学出版社,2006

(上接第26页)

参考文献

- 1 章建跃. 为什么用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数[J]. 数学通报,2007,1
- 2 齐民友. 三角函数 向量 复数[J]. 数学通报,2007,10~11
- 3 何军,徐香丽. “任意角的三角函数定义”教学片断三种设计之比较[J]. 中小学数学(高中版),2009,1—2
- 4 朱成万. 任意角的三角函数概念的教学解构[J]. 中小学数学(高中版),2009,1—2

- 5 李柏青. “任意角的三角函数”教学设计[J]. 中小学数学(高中版),2009,7—8
- 6 孔祥武. 数学教材二次开发使用中的几点建议[J]. 数学通讯,2011,3(下)
- 7 何周火. “任意角的三角函数”的教学探索[J]. 中小学数学(高中版),2008,3
- 8 章建跃. 追求数学课堂的本来面目——第七次课题会成果综述. 人教网,2009,4
- 9 王芝平. 任意角三角函数概念的教学实录[J]. 中小学数学(高中版),2011,4